

一类具有延迟中立型微分方程的渐近概自守温和解

姚慧丽, 李小桐, 王晶囡, 李雪鑫

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 各类微分方程是基于不同实际问题而建立的数学模型, 研究方程的各种解的存在问题引起了国内外数学学者的关注。利用 Banach 压缩映射原理、概自守型函数的有关理论以及卷积族的指数二分性, 针对一类具有延迟的中立型微分方程的渐近概自守温和解的存在唯一性问题进行研究。渐近概自守温和解比概自守温和解更具有有一般性, 因此本文所研究问题会使这类方程的应用范围更加广泛。

关键词: 渐近概自守温和解; 中立型微分方程; Banach 压缩映射原理

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.04.021

中图分类号: O177.92 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021)04-0153-06

Asymptotically Almost Automorphic Mild Solutions for a Class of Neutral Differential Equations with Delay

YAO Hui-li, LI Xiao-tong, WANG Jing-nan, LI Xue-xin

(School of Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: All kinds of differential equations as mathematical models have been built up due to different practical problems, so the problem of studying the existence of various solutions has attracted the attention of mathematical scholars at home and abroad. The problem on the existence and uniqueness of asymptotically almost automorphic mild solutions for a class of neutral differential equations with delay are researched by using Banach compression mapping principle, related theorems of almost automorphic type functions and the exponential dichotomy of convolution family in this paper. Asymptotically almost automorphic mild solutions are more general than almost automorphic mild solutions, so the research of this paper will make the scope of application on this kind of differential equations more extensive.

Keywords: asymptotically almost automorphic mild solutions; neutral differential equations; Banach compression mapping principle

收稿日期: 2020-05-17

基金项目: 国家自然科学基金(11801122).

作者简介: 李小桐(1994—), 女, 硕士研究生;

王晶囡(1978—), 女, 博士, 副教授.

通信作者: 姚慧丽(1970—), 女, 博士, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: Huili_yao@sohu.com.

0 引言

微分方程是多学科研究领域常用的工具,如数学、物理学、化学、生物学等。其中,要研究的多数问题都可以转化为探讨微分方程的各类解的存在性问题。目前为止已有大量文献对各类微分方程的概周期型解^[1-6],概自守温和解^[7-11]、以及伪概自守温和解^[12-15]进行了研究。

1 预备知识

本文用 $\mathbf{R}$ 表示实数集, X, Y 表示 Banach 空间。 $C(R, X)$ ($C(R \times X, X)$, $C(R \times X \times Y, X)$) 表示从 $\mathbf{R}$ 到 X (从 $R \times X$ 到 X , $R \times X \times Y$ 到 X) 的全体有界连续函数在上确界范数下构成的 Banach 空间。

本文将对下列一类具有延迟的中立型微分方程

$$\frac{d}{dt}(u(t) - F_1(t, u(t - \tau))) = A(t)(u(t) - F_1(t, u(t - \tau))) + F_2(t, u(t), u(t - \tau)), t \in \mathbf{R} \quad (1)$$

的渐近概自守温和解的存在唯一性进行研究。这里 $A(t)$ 是定义在 X 上的卷积族 $\{U(t, s) : t \geq s, t, s \in \mathbf{R}\}$ 的无穷小生成元, τ 是一个正常数, F_1, F_2 是后面指定的适当的函数。为此先给出有关定义。

定义 1^[6] 函数 $g \in C(R, X)$ 称做是概自守的, 是指对于每一个实数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, 这里都存在它一个子列 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \tau_n)$$

对于所有的 $t \in \mathbf{R}$ 都是明确定义的, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - \tau_n) = f(t)$$

对每个 $t \in \mathbf{R}$ 均成立。用 $AA(R, X)$ 表示全体概自守函数构成的集合。

定义 2^[6] 函数 $f \in C(R \times X, X)$ 称做是概自守的, 是指 f 关于 $t \in \mathbf{R}$ 且一致对 $x \in K$ 是概自守的, 其中 K 是 X 的任意有界闭子集。用 $AA(R \times X, X)$ 表示这样函数的全体。

定义 3^[6] 函数 $f \in C(R \times X \times Y, X)$ 称做是概自守的, 是指 f 关于 $t \in \mathbf{R}$ 且一致对 $(x, y) \in K$ 是概自守的。这里 K 是 $X \times Y$ 的任意有界闭子集。用 $AA(R \times X \times Y, X)$ 表示这样函数的全体。

置

$$C_0(R, X) = \{f \in C(R, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(t)\| = 0\}$$

$$C_0(R \times X, X) = \{f \in C(R \times X, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(t, x)\| = 0 \text{ 一致对 } x \in K, K \text{ 是 } X \text{ 的任意有界闭子集}\}$$

0 一致对 $x \in K, K$ 是 X 的任意有界闭子集}

$$C_0(R \times X \times Y, X) = \{f \in C(R \times X \times Y, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(t, x, y)\| = 0 \text{ 一致对 } (x, y) \in K, K \text{ 是 } X \times Y \text{ 的任意有界闭子集}\}$$

定义 4^[7] 函数 $f \in C(R, X)$ 称做是渐近概自守的, 是指若 f 能写成

$$f = g + \varphi (g \in AA(R, X), \varphi \in C_0(R, X))$$

用 $AAA(R, X)$ 表示这样函数的全体。

定义 5^[7] 函数 $f \in C(R \times X, X)$ 称为是渐近概自守的, 是指 f 能写成

$$f = g + \varphi (g \in AA(R \times X, X), \varphi \in C_0(R \times X, X))$$

用 $AAA(R \times X, X)$ 表示这样函数的全体。

定义 6^[7] 函数 $f \in C(R \times X \times Y, X)$ 称做是渐近概自守的, 是指若 f 能写成

$$f = g + \varphi (g \in AA(R \times X \times Y, X), \varphi \in C_0(R \times X \times Y, X))$$

用 $AAA(R \times X \times Y, X)$ 表示这样函数的全体。

另外 $AAA(R, X)$, $AAA(R \times X, X)$ 和 $AAA(R \times X \times Y, X)$ 在上确界范数下都构成 Banach 空间, 仍用这些符号来记。

定义 7^[8] 定义在 X 上的双参数有界线性算子族 $\{U(t, s) : t \geq s, t, s \in \mathbf{R}\}$ 被称做卷积族, 是指若满足

$$(i) U(t, s) = I, U(t, s) = U(t, r)U(r, s) (t \geq r \geq s \text{ 且 } t, r, s \in \mathbf{R}), \text{ 这里 } I \text{ 为恒等算子。}$$

$$(ii) (t, s) \in \{(\tau, \sigma) \in \mathbf{R}^2 : \tau \geq \sigma\} \rightarrow U(t, s) \text{ 是强连续的。}$$

定义 8^[8] 卷积族 $\{U(t, s) : t \geq s, t, s \in \mathbf{R}\}$ 被称做是指数二分的, 是指若存在映射 $P(t) (t \in \mathbf{R})$ 关于 t 是一致有界且是强连续的, 且存在常数 $N, \delta > 0$ 满足

$$(i) U(t, s)P(s) = P(t)U(t, s), \text{ 对所有的 } t \geq s;$$

$$(ii) \text{ 限制 } U_Q(t, s) : Q(s)X \rightarrow Q(t)X \text{ 是可逆的, 对所有的 } t \geq s (\text{记 } U_Q(t, s) = U_Q(t, s)^{-1});$$

$$(iii) \|U(t, s)P(s)\|_{U(X)} \leq Ne^{-\delta(t-s)} \text{ 且 } \|U_Q(t, s)Q(t)\|_{U(X)} \leq Ne^{-\delta(t-s)}, \text{ 对所有的 } t \geq s。$$

这里 $Q = I - P$ 。

注意到如果 $U(t, s)$ 是指数二分的, 则对应于 $U(t, s)$ 和 $P(\cdot)$ 的格林函数 $\Gamma(t, s)$ 定义为

$$\Gamma(t, s) = \begin{cases} U(t, s)P(s), & t \geq s, t, s \in \mathbf{R} \\ -U_Q(t, s)Q(s), & t < s, t, s \in \mathbf{R} \end{cases}$$

满足

$$\|I(t,s)\| \leq \begin{cases} Ne^{-\delta(t-s)}, & (t \geq s, t,s \in \mathbf{R}) \\ Ne^{\delta(t-s)}, & (t < s, t,s \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

本文中假设 $A(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) 满足 “Acquistapace-Terreni” 条件:

存在常数 $\lambda_0 \geq 0, \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi), L, K \geq 0$ 且 $\alpha,$

$\beta \in (0, 1]$, 当 $\alpha + \beta > 1$ 时满足

$$\sum_{\theta} \cup \{0\} \subset \rho(A(t) - \lambda_0), \|R(\lambda, A(t) - \lambda_0)\| \leq \frac{K}{1 + \|\lambda\|}$$

且

$$\|(A(t) - \lambda_0)R(\lambda, A(t) - \lambda_0) - R(\lambda_0, A(t))\| \leq L|t-s|^\alpha \|\lambda\|^{-\beta} (t,s \in \mathbf{R}, \lambda \in \sum_{\theta} := \{\lambda \in C \setminus \{0\} : |\arg \lambda| \leq \theta\})$$

注: 由文 [9] 知, 如果 “Acquistapace-Terreni” 条件成立, 则在 X 上存在唯一的卷积族 $\{U(t,s)\}_{-\infty < s \leq t < \infty}$ 决定一个线性方程

$$\frac{d}{dt}v(t) = A(t)v(t)$$

定义 9 [8] 连续函数 $u: \mathbf{R} \rightarrow X$ 称做是方程 (1) 的温和解是指若 u 满足

$$u(t) - F_1(t, u(t-\tau)) = U(t,a)(u(a) - F_1(a, u(a-\tau))) + \int_a^t U(t,s)F_2(s, u(s), u(s-\tau))ds \quad (t \geq a, t,a \in \mathbf{R}) \quad (2)$$

由文 [20] 知, 若 u 是方程 (1) 的温和解, 则式 (2) 可由

$$u(t) - F_1(t, u(t-\tau)) = \int_{\mathbf{R}} I(t,s)F_2(s, u(s), u(s-\tau))ds \quad (3)$$

代替。

2 主要结果

对方程 (1) 先给出以下假设:

(H₁) 由 $A(t)$ 生成的卷积族 $\{U(t,s)\}_{-\infty < s \leq t < \infty}$ 是指数二分的, 并设对应的常数为 $N, \delta > 0$, 二分映射为 $P(t)$ ($t \in \mathbf{R}$), 格林函数为 $\Gamma(t,s)$ 。

(H₂) 对于任意的实数列 $\{s_n\}$, 都存在它的子列 $\{s_{n_k}\}$ 满足

$$A(t,s)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(t+s_n, s+s_n)x$$

对任意 $x \in X$ 以及 $t,s \in \mathbf{R}$ 都是定义好的。且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(t-s_n, s-s_n)x = \Gamma(t,s)x$$

对每个 $x \in X$ 以及 $t,s \in \mathbf{R}$ 。

(H₃) $F_1 \in AAA(R \times X, X), F_2 \in AAA(R \times X \times X, X)$, 且存在常数 $\mu_i > 0, i = 1, 2, 3$ 使得

$$\|F_1(t, u_1) - F_1(t, u_2)\| \leq \mu_1 \|u_1 - u_2\|, u_1, u_2 \in X, t \in \mathbf{R}$$

以及

$$\|F_2(t, u_1, v_1) - F_2(t, u_2, v_2)\| \leq \mu_2 \|u_1 - u_2\| + \mu_3 \|v_1 - v_2\|, u_i, v_i \in X, i = 1, 2, t \in \mathbf{R}$$

再给出主要结果之前, 先给出几个命题:

命题 1 若 $u(t) \in AAA(R, X)$, 则 $u(t-\tau) \in AAA(R, X)$ 。

证明: 因为 $u(t) \in AAA(R, X)$, 由定义 4 可知

$$u(t) = g(t) + \varphi(t), (g(t) \in AA(R, X), \varphi(t) \in C_0(R, X))$$

因此

$$u(t-\tau) = g(t-\tau) + \varphi(t-\tau)$$

由文 [6] 知 $g(t-\tau) \in AA(R, X)$ 。

因为 $\varphi(t) \in C_0(R, X)$, 所以任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $T > 0$, 当 $|t| \geq T$ 时, 有 $|\varphi(t)| < \varepsilon$, 故当 $|t| > T + \tau$ 时, $|\varphi(t-\tau)| < \varepsilon$, 由此得 $\varphi(t-\tau) \in C_0(R, X)$, 再结合 $g(t-\tau) \in AA(R, X)$ 以及定义 4 可得 $u(t-\tau) \in AAA(R, X)$ 。

命题 2 若 (H₃) 成立, 且 $u \in AAA(R, X), F_1 \in AAA(R \times X, X)$, 则

$$F_1(\cdot, u(\cdot-\tau)) \in AAA(R, X)。$$

证明: 由命题 1 知 $u(t-\tau) \in AAA(R, X)$, 记 $u(t-\tau) = u_0(t)$, 则

$$u_0(t) = g(t) + \varphi(t), (g(t) \in AA(R, X), \varphi(t) \in C_0(R, X))$$

因为 $F_1 \in AAA(R \times X, X)$, 所以由定义 5 有

$$F_1 = G_1 + \Phi_1, (G_1 \in AA(R \times X, X), \Phi_1 \in C_0(R \times X, X)) \quad (4)$$

从而

$$F_1(t, u(t-\tau)) = F_1(t, u_0(t)) = G_1(t, u_0(t)) + \Phi_1(t, u_0(t)) = G_1(t, g(t)) + [G_1(t, u_0(t)) - G_1(t, g(t)) + \Phi_1(t, u_0(t))] \quad (5)$$

由文 [21] 可知 $G_1(t, g(t)) \in AA(R, X)$ 。又 $\Phi_1 \in C_0(R \times X, X)$, 所以易知

$$\Phi_1(t, u_0(t)) \in C_0(R, X) \quad (6)$$

下证 $G_1(t, u_0(t)) - G_1(t, g(t)) \in C_0(R, X)$ 。

事实上, 结合式 (4) 及 (H₃) 有

$$\begin{aligned} & \|G_1(t, u_0(t)) - G_1(t, g(t))\| \leq \|(G_1(t, u_0(t)) + \Phi_1(t, u_0(t))) - (G_1(t, g(t)) + \Phi_1(t, g(t)))\| + \|\Phi_1(t, u_0(t))\| + \|\Phi_1(t, g(t))\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|F_1(t, u_0(t)) - F_1(t, g(t))\| + \\ & \|\Phi_1(t, u_0(t))\| + \|\Phi_1(t, g(t))\| \leq \\ & \mu_1 \|u_0(t) - g(t)\| + \|\Phi_1(t, u_0(t))\| + \\ & \|\Phi_1(t, g(t))\| = \mu_1 \|\varphi(t)\| + \\ & \|\Phi_1(t, u_0(t))\| + \|\Phi_1(t, g(t))\| \end{aligned}$$

再结合 $\varphi \in C_0(R, X)$, $\Phi_1 \in C_0(R \times X, X)$ 可得

$$G_1(t, u_0(t)) - G_1(t, g(t)) \in C_0(R, X) \quad (7)$$

结合 $G_1(t, g(t)) \in AA(R, X)$ 以及式(5)~(7)可得

$$F_1(\cdot, u(\cdot - \tau)) \in AAA(R, X)$$

命题3 若 (H_3) 成立, 且 $u \in AAA(R, X)$, $F_2 \in AAA(R \times X \times X, X)$, 则

$$F_2(\cdot, u(\cdot), u(\cdot - \tau)) \in AAA(R, X)$$

证明: 证明方法类似命题2的证明方法, 故省略。

命题4 假设 $(H_1) \sim (H_3)$ 成立, $u \in AAA(R, X)$, 则

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) F_2(s, u(s), u(s - \tau)) ds \in AAA(R, X)$$

证明: 因 (H_3) 成立, 所以命题3成立, 即 $F_2(\cdot, u(\cdot), u(\cdot - \tau)) \in AAA(R, X)$, 故

$$F_2(s, u(s), u(s - \tau)) = g(s) + \varphi(s) \quad (g \in AA(R, X), \varphi \in C_0(R, X))$$

因此得

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) F_2(s, u(s), u(s - \tau)) ds = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) (g(s) + \varphi(s)) ds = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) g(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds \end{aligned}$$

由假设 $(H_1) \sim (H_3)$ 并结合文[2]的定理2.2知

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) g(s) ds \in AA(R, X) \quad (8)$$

以下证明

$$\Psi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds \in C_0(R, X)$$

因为 $\varphi(s) \in C_0(R, X)$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_0 > 0$, 当 $|s| \geq T_0$ 时, 有 $\|\varphi(s)\| < \varepsilon$ 。又因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} = 0, \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\delta t} = 0$

所以存在 $T_1 > 0$, 当 $t > T_1$ 时, $\|e^{-\delta t} - 0\| < \varepsilon$, 当 $t < -T_1$ 时, $\|e^{\delta t} - 0\| < \varepsilon$ 。取 $T = T_0 + T_1$, 因为 $\varphi(s)$ 是有界的, 所以存在 $M_1 > 0$, 当 $s \in [-T_0, T_0]$ 时, 有 $\|\varphi(s)\| \leq M_1$ 。

1) 当 $t > T$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds \right\| &= \left\| \int_{-\infty}^{-T_0} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds + \right. \\ & \int_{-T_0}^{T_0} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds + \left. \int_{T_0}^{\infty} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds \right\| \leq \left\| \int_{-\infty}^{-T_0} N e^{-\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| + \\ & \left\| \int_{-T_0}^{T_0} N e^{-\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| + \left\| \int_{T_0}^{\infty} N e^{-\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| + \\ & \left\| \int_t^{\infty} N e^{\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| \leq \left| N \mathcal{E} \int_{-\infty}^{-T_0} e^{-\delta(t-s)} ds \right| + \\ & \left| M_1 N \int_{-T_0}^{T_0} e^{-\delta(t-s)} ds \right| + \left| N \mathcal{E} \int_{T_0}^{\infty} e^{-\delta(t-s)} ds \right| + \\ & \left| N \mathcal{E} \int_t^{\infty} e^{\delta(t-s)} ds \right| = \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} e^{-\delta(t-s)} \Big|_{-\infty}^{-T_0} \right| + \\ & \left| \frac{M_1 N}{\delta} e^{-\delta(t-s)} \Big|_{-T_0}^{T_0} \right| + \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} e^{-\delta(t-s)} \Big|_{T_0}^{\infty} \right| + \\ & \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} e^{\delta(t-s)} \Big|_t^{\infty} \right| = \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} \left(\frac{1}{e^{\delta(t+T_0)}} - \frac{1}{e^{\delta(t+\infty)}} \right) \right| + \\ & \left| \frac{M_1 N}{\delta} \left(\frac{1}{e^{\delta(t-T_0)}} - \frac{1}{e^{\delta(t+T_0)}} \right) \right| + \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} \left(\frac{1}{e^{\delta(t-T_0)}} - \frac{1}{e^{\delta(t+T_0)}} \right) \right| + \\ & \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} (e^{\delta(t-\infty)} - e^{\delta(t-t)}) \right| \leq \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} \right| + \left| \frac{M_1 N}{\delta} \mathcal{E} \right| + \\ & \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} \right| + \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} \right| \end{aligned} \quad (9)$$

2) 当 $t < -T$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds \right\| &= \left\| \int_{-\infty}^t \Gamma(t, s) \varphi(s) ds + \right. \\ & \int_t^{-T_0} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds + \left. \int_{-T_0}^{T_0} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds + \right. \\ & \int_{T_0}^{\infty} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds \left. \right\| \leq \left\| \int_{-\infty}^t N e^{-\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| + \\ & \left\| \int_t^{-T_0} N e^{\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| + \left\| \int_{-T_0}^{T_0} N e^{\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| + \\ & \left\| \int_{T_0}^{\infty} N e^{\delta(t-s)} \varphi(s) ds \right\| \leq \left| N \mathcal{E} \int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)} ds \right| + \\ & \left| N \mathcal{E} \int_t^{-T_0} e^{\delta(t-s)} ds \right| + \left| M_1 N \int_{-T_0}^{T_0} e^{\delta(t-s)} ds \right| + \\ & \left| N \mathcal{E} \int_{T_0}^{\infty} e^{\delta(t-s)} ds \right| = \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} e^{-\delta(t-s)} \Big|_{-\infty}^t \right| + \\ & \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} e^{\delta(t-s)} \Big|_t^{-T_0} \right| + \left| \frac{M_1 N}{-\delta} e^{\delta(t-s)} \Big|_{-T_0}^{T_0} \right| + \\ & \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} e^{\delta(t-s)} \Big|_{T_0}^{\infty} \right| = \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} (e^{-\delta(t-t)} - e^{-\delta(t+\infty)}) \right| + \\ & \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} (e^{\delta(t+T_0)} - e^{\delta(t-t)}) \right| + \left| \frac{M_1 N}{-\delta} (e^{\delta(t-T_0)} - e^{\delta(t+T_0)}) \right| + \\ & \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} (e^{\delta(t-\infty)} - e^{\delta(t-T_0)}) \right| \leq \left| \frac{N \mathcal{E}}{\delta} \right| + \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} \right| + \\ & \left| \frac{M_1 N}{-\delta} \mathcal{E} \right| + \left| \frac{N \mathcal{E}}{-\delta} \right| \end{aligned} \quad (10)$$

由式(9)和式(10)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) \varphi(s) ds \in C_0(R, X) \quad (11)$$

结合式(8)和式(11)得

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) F_2(s, u(s), u(s-\tau)) ds \in AAA(R, X)$$

定理1 若方程(1)满足 $(H_1) \sim (H_3)$, 则当 $\mu_1 + \frac{2N}{\delta}(\mu_2 + \mu_3) < 1$ 时, 方程(1)存在唯一的由式(3)

所定义的渐近概自守温和解。

证明: 做映射 Q :

$$(Qu)(t) = F_1(t, u(t-\tau)) + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) F_2(s, u(s), u(s-\tau)) ds, u(t) \in AAA(R, X)$$

由命题2和命题4知

$$F_1(t, u(t-\tau)) + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, s) F_2(s, u(s), u(s-\tau)) ds \in AAA(R, X)$$

因此 Q 是从 $AAA(R, X)$ 到 $AAA(R, X)$ 上的一个映射, 即 $(Qu) \in AAA(R, X)$ 。

取数 r 满足

$$r > \sup_{t \in R} \|F_1(t, 0)\| + \frac{2N}{\delta} \sup_{s \in R} \|F_2(s, 0, 0)\| + (\mu_1 + \frac{2N}{\delta}(\mu_2 + \mu_3))r$$

令

$$B_r = \{u \in AAA(R, X) : \|u\| = \sup_{t \in R} \|u(t)\| \leq r\}$$

任取 $u \in B_r$, 有

$$\begin{aligned} \|(Qu)(t)\| &\leq \|F_1(t, 0)\| + \mu_1 \|u(t-\tau)\| + \int_{-\infty}^t Ne^{-\delta(t-s)} (\|F_2(s, 0, 0)\| + \mu_2 \|u(s)\| + \mu_3 \|u(s-\tau)\|) ds \\ &+ \int_t^{\infty} Ne^{-\delta(s-t)} (\|F_2(s, 0, 0)\| + \mu_2 \|u(s)\| + \mu_3 \|u(s-\tau)\|) ds, t \in R \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \sup_{t \in R} \|(Qu)(t)\| &\leq \sup_{t \in R} \|F_1(t, 0)\| + \frac{2N}{\delta} \sup_{s \in R} \|F_2(s, 0, 0)\| + (\mu_1 + \frac{2N}{\delta}(\mu_2 + \mu_3))r \leq r \end{aligned}$$

结合 $(Qu) \in AAA(R, X)$ 可得 $(Qu) \in B_r$, 因此 $Q(B_r) \subset B_r$ 。

任取 $u \in B_r, v \in B_r$, 并结合 (H_3) 有

$$\begin{aligned} \|(Qu)(t) - (Qv)(t)\| &\leq \|F_1(t, u(t-\tau)) - F_1(t, v(t-\tau))\| + \int_{-\infty}^{\infty} \|\Gamma(t, s)\| \|F_2(s, u(s), u(s-\tau)) - F_2(s, v(s), v(s-\tau))\| ds \\ &\leq \mu_1 \|u(t-\tau) - v(t-\tau)\| + \int_{-\infty}^t \|\Gamma(t, s)\| \|F_2(s, u(s), u(s-\tau)) - F_2(s, v(s), v(s-\tau))\| ds \\ &+ \int_t^{\infty} \|\Gamma(t, s)\| \|F_2(s, u(s), u(s-\tau)) - F_2(s, v(s), v(s-\tau))\| ds \leq \mu_1 \|u(t) - v(t)\| + \frac{2N}{\sigma} (\mu_2 \|u(t) - v(t)\| + \mu_3 \|u(t) - v(t)\|) \leq [\mu_1 + \frac{2N}{\sigma}(\mu_2 + \mu_3)] \|u - v\| \end{aligned}$$

又 $\mu_1 + \frac{2N}{\delta}(\mu_2 + \mu_3) < 1$, 所以 Q 是 B_r 上的一个压缩映射, 由 Banach 压缩映射原理知 Q 在 B_r 上存在唯一的不动点 u , 此不动点 u 就是方程(1)的满足式(3)所定义的渐近概自守温和解。

3 结 论

本文利用 Banach 压缩映射原理、卷积族的指数二分性及概自守型函数的有关性质证明了一类具有延迟的中立型微分方程在适当的条件下存在唯一的渐近概自守温和解。

参 考 文 献:

- [1] MYSLO Y M, TKACHENKO V I. Asymptotically Almost Periodic Solutions of Equations with Delays and Nonfixed Times of Pulse Action [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2018, 228 (3): 290.
- [2] SLYUSARCHUK V Y. Almost Periodic Solutions of Functional Equations [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2017, 222 (3): 359.
- [3] YU YUEHUA, GONG SHUHUA. Pseudo Almost Periodic Solutions for First-Order Neutral Differential Equations [J]. Advances in Difference Equations, 2018, 2018(1): 1.
- [4] DIAGANA T, HERNANDEZ E, RABELLO M. Pseudo Almost Periodic Solutions to Some Nonautonomous Neutral Functional Differential Equations with Unbounded Delay [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 45(9/10): 1241.
- [5] ZHAO Z H, CHANG Y K, LI W S. Asymptotically Almost Periodic, Almost Periodic and Pseudo-Almost Periodic Mild Solutions for Neutral Differential Equations [J]. Nonlinear Analysis: Real

- World Applications, 2010, 11(4):3037.
- [6] 姚慧丽,孙海彤,卜宪江. 一类可变延迟细胞神经网络的渐近概周期解 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2017, 22(5): 130.
YAO HUILI, SUN HAITONG, BU XIANJIANG. Asymptotically Almost Periodic Solutions for a Class of Cellular Neural Networks with Varying Delays [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2017, 22(5):130.
- [7] REVATHIP, SAKTHI VEL R, REN Y, et al. Existence of Almost Automorphic Mild Solution to Nonautonomous Neutral Stochastic Differential Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 230:639.
- [8] DIAGANA T, HERNAN R. HENRIQUEZ, EDUARDO M. HERMANDEZ. Almost Automorphic Mild Solutions to Some Partial Neutral Functional-Differential Equations and Applications [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2008, 69(5-6): 1485.
- [9] MISHRA, BAHUGUNA, ABBAS. Existence of Almost Automorphic Solutions of Neutral Functional Differential Equation [J]. Nonlinear Dynamics & Systems Theory, 2011, 2011(2):165.
- [10] BOULITE S, MANIAR L, NGUÉRÉKATA G M. Almost automorphic solutions for hyperbolic semilinear evolution equations [J]. Semigroup Forum, 2005, 71:231.
- [11] GISELE M M, GASTON M N. Almost Automorphic Solutions of Neutral Functional Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equation, 2010, 69:1.
- [12] GU Y, REN Y, SAKTHIVEL R. Square-Mean Pseudo Almost Automorphic Mild Solutions for Stochastic Evolution Equations Driven By Brownian Motion [J]. Stochastic Analysis and Applications, 2016, 34(3):528.
- [13] XIAO T J, ZHU X X, LIANG J. Pseudo-Almost Automorphic Mild Solutions to Nonautonomous Differential Equations and Applications [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2008, 70(11): 4079.
- [14] CHANG Y K, FENG T W. Properties on Measure Pseudo Almost Automorphic Functions and Applications to Fractional Differential Equations in Banach Space [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2018, 2018(47):1.
- [15] CHANG Y K, ZHENG S. Weighted Pseudo Almost Automorphic Solutions to Functional Differential Equations with Infinite Delay [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2016, 2016(286):1.
- [16] BOCHNER S. A New Approach to Almost Periodicity [J]. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A, 1962, 48:2039.
- [17] NGUEREKATA, GASTON MANDATA. Some Remarks on Asymptotically Almost Automorphic Function [J]. Rivista Di Matematica Della Università Di Parma, 1988, 13(4):301.
- [18] GISELE M M, GASTON M N. Almost Automorphic Solutions of Neutral Functional Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equation, 2010, 69:1.
- [19] YAGHI A. Abstract Quasilinear Evolution Equations of Parabolic Type in Banachspaces [J]. Boll. Un. Mat. Ital. B, 1991, 7(5):341.
- [20] CHICONE C, LATUSHKIN Y. Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations [J]. Amer. Math. Soc., 1999, 40:65.
- [21] LIANG J, ZHANG JUN, XIAO T-J. Composition of Pseudo Almost Automorphic and Asymptotically Almost Automorphic Functions [J]. Math. Anal. Appl, 2008, 340(2):1493.
- [22] DING H-S, NGUÉRÉKATA G M, LONG W. Almost Automorphic Solutions of Nonautonomous Evolution Equations [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(12):4158.

(编辑: 温泽宇)